თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

კომპიუტერულ მეცნიერებათა დეპარტამენტი

ამოცანები და სავარჯიშოები საგანში

დ ი ს კ რ ე ტ უ ლ ი ს ი ს ტ ე მ ე ბ ი ს ქ ც ე ვ ი ს მ ო დ ე ლ ე ბ ი

ასოცირებული პროფესორი ტარიელ ხვედელიძე

- 2014 –

1. მარკოვის დისკრეტული ჯაჭვები

მარკოვის ჯაჭვი ეწოდება ცდათა მიმდევრობას, თუ n - ური ცდის შედეგი დამოკიდებულია მხოლოდ წინა $n-1$ ცდის შედეგზე და არაა დამოკიდებული ადრე ჩატარებული არცერთი ცდის შედეგზე.

ცდის შედეგებს ეწოდება მდგომარეობები. მარკოვის ჯაჭვი აღიწერება $P(\mathrm{f}_n = \mathrm{j}/\mathrm{f}_{n-1} = i)$ პირობითი ალბათობებით, რომელიც აღნიშნავს i-ური მდგომარეობიდან j -ურ მდგომარეობაში გადასვლის პირობით ალბათობას. თუ ეს ალბათობები არ იცვლებიან ცდების შედეგად (ე.ი. ერთი და იგივე რიცხვებია ყველა ცდისათვის), მაშინ იტყვიან, რომ მარკოვის ჯაჭვი ერთგვაროვანია. ამ შემთხვევაში შეიძლება დავწეროთ $P(\mathrm{f}_n = \mathrm{j}/\mathrm{f}_{n-1} = i)$= P_{ij}.

თუ გადასვლის ალბათობები დამოკიდებულია ცდის ნომერზე, მაშინ ჯაჭვი არაერთგვაროვანია.

2. სტოქასტური მატრიცები

მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის p_{ij} ალბათობების ერთობლიობა მოიცემა კვადრატული სტოქასტური მატრიცის სახით

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

სადაც $0 \le p_{ij} \le 1$, $\sum_j p_{ij} = 1$. ამ მატრიცის სტრიქონები შეესაბამებიან შესაძლებელ მდგომარეობას n - ურ ცდაში, ხოლო სვეტები $n+1$ ცდაში.

ისეთ მატრიცას, რომლის თითოეული სტრიქონის ელემენტები არაუარყოფითია და მათი ჯამი ერთის ტოლია ($0 \le p_{ij} \le 1, \sum_{j=1}^{i} p_{ij} = 1$) ეწოდება სტოქასტური მატრიცა. თუ სტრიქონების ელემენტების ჯამის გარდა სვეტების ელემენტების ჯამიც 1-ის ტოლია ($\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, \sum_{i=1}^{k} p_{ij} = 1, 0 \le p_{ij} \le 1$), მაშინ ასეთ მატრიცას ეწოდება ორმაგად სტოქასტური. p_{ij} ელემეტი აღნიშნავს n+1 ცდაში j-ურ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობას, თუ n - ურ ცდაში გვქონდა i-ური მდგომარეობა.

სტოქასტური მატრიცის კერძო სახეს წარმოადგენს დეტერმინირებული მატრიცა. დეტერმინირებული მატრიცის თითოეულ სტრიქონში დგას ერთი ცალი 1-ანი, ხოლო დანარჩენი ელემენტები 0-ის ტოლია.

ნებისმიერი სტოქასტური მატრიცა შეიძლება განვიხილოთ როგორც მდგომარეობებს შორის გადასვლის ალბათობების მატრიცა. საწყის განაწილებასთან ერთად ის სრულად განსაზღვრავს გარკვეულ მარკოვის ჯაჭვს.

1. მოცემულია მატრიცები:

ა) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ბ) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

გ) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ დ) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ე) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ ვ) $P = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ ზ) $P = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

თ) $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ ი) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

კ) $P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ლ) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

მოცემული მატრიცებიდან რომელი მატრიცა წარმოადგენს:

- კვადრატულ მატრიცას?
- სვეტ მატრიცას?
- სტრიქონ მატრიცას?
- მართკუთხა მატრიცას?

- სტოქასტურ მატრიცას?
- ორმაგად სტოქასტურ მატრიცას?
- დეტერმინირებულ მატრიცას?
- მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის გადასვლის მატრიცას? რამდენ მდგომარეობიანია ეს ჯაჭვი?

3. $A_1, A_2, \dots, A_n$ წერტილები წარმოადგენენ წესიერი n - კუთხედის წვეროებს. რაიმე ნაწილაკი შემთხვევით ხეტიალობს აღნიშნულ წერტილებზე. განსაზღვრეთ, არის თუ არა ნაწილაკის მდგომარეობათა მიმდევრობა მარკოვის ჯაჭვი, თუ

   - ნაწილაკი დეტერმინირებულად მოძრაობს საათის ისრის მიმართულებით;

   - ნაწილაკი საწყის მომენტში შემთხვევით ირჩევს მიმართულებას და შემდეგ მუდმივად მოძრაობს არჩეული მიმართულებით;
- ნაწილაკი A_i, $i \neq 1$ წერტილიდან მეზობელ წერტილში p ალბათობით გადაადგილდება საათის ისრის მიმართულებით, ხოლო $q = 1 - p$ ალბათობით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. A_1 წერტილში მოხვედრის შემდეგ ნაწილაკი ბრუნდება იმ წერტილში, რომლიდანაც ის მოხვდა A_1 წერტილში.

3. მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის 2,3 და ზოგადად $\boldsymbol{n}$ ბიჯზე გადასვლის ალბათობების გამოთვლა

ავღნიშნოთ $p_{ij}^{(n)}$ - ით S_i - ური მდგომარეობიდან S_j- ურ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა ზუსტად $\boldsymbol{n}$ ბიჯში. კერძოდ :

$$P^{(1)} = \left(p_{ij}^{(1)}\right) = \left(p_{ij}\right) = P \quad \text{და} \quad P^{(2)} = (p_{ij}^{(2)}) = \sum_{\nu} p_{i\nu} p_{\nu j}.$$

ზოგადად

$$P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)}) = \sum_{\nu=1}^{k} p_{i\nu}^{(n-1)} p_{\nu j} \ .$$

S_i - ური მდგომარეობიდან S_j- ურ მდგომარეობაში გადასვლის ${p_{ij}}^{(n)}$ ალბათობები ზუსტად $\boldsymbol{n}$ ბიჯში შეიძლება გამოვთვალოთ უშუალოდ P მატრიცის ახარისხებითაც:

$$P^{(n)} = ({p_{ij}}^{(n)}) = P^n.$$

შესაბამისად P^n მატრიცის i -ური სტრიქონისა და j- ური სვეტის გადაკვეთაზეა ${p_{ij}}^{(n)}$ ალბათობა.

4. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცა.

$$1.\ \ P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \qquad 2.\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3.\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 4.\ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

განსაზღვრეთ მდგომარეობათა რაოდენობა და ააგეთ შესაბამისი გრაფები. იპოვეთ: $p_{13}^{(2)}$, $p_{33}^{(2)}$, $p_{34}^{(2)}$, $p_{13}^{(3)}$, $p_{33}^{(3)}$, P^2 და $P^{(2)}$.

5. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ n – ბიჯიანი (n =2,3) გადასვლის მატრიცა.

4. მარკოვის ჯაჭვების მდგომარეობებისა და ჯაჭვების კლასიფიკაცია

მდგომარეობას ეწოდება მშთანთქავი, თუ მასში მოხვედრის შემდეგ შეუძლებელია იქედან გამოსვლა.

მდგომარეობას ეწოდება დაბრუნებადი, თუ იგი ან მშთანთქავია ან ამ მდგომარეობიდან გამოსვლის შემდეგ შესაძლებელია მასში დაბრუნება (ოდესმე) და არადაბრუნებადი წინააღმდეგ შემთხვევაში.

s_j მდგომარეობას (დაბრუნებადს) აქვს $d > 1$ პერიოდი, თუ $p_{jj}^{(n)} = 0$, როცა n არ არის d -ს ჯერადი, ხოლო d არის უდიდესი მთელი რიცხი, რომელსაც ეს თვისება გააჩნია. s_j მდგომარეობა არის არაპერიოდული, თუ ასეთი $d > 1$ არ არსებობს. ე.ი. d არის უდიდესი საერთო გამყოფი $\{ n : p_{jj}(n) > 0 \}$ რიცხვთა სიმრავლისა.

მდგომარეობათა ერგოდული სიმრავლე - ისეთი სიმრავლე, რომელშიდაც ნებისმიერი მდგომარეობიდან შეიძლება მოხვდე ნებისმიერ სხვა მდგომარეობაში, მაგრამ ასეთი სიმრავლიდან გამოსვლა შეუძლებელია.

მდგომარეობათა არადაბრუნებადი სიმრავლე - ისეთი სიმრავლე, რომელშიდაც ნებისმიერი მდგომარეობიდან შეიძლება მოხვდე ნებისმიერ მდგომარეობაში, მაგრამ ასეთი სიმრავლიდან გამოსვლა შესაძლებელია.

ერგოდული მდგომარეობა - ერგოდულ მდგომარეობათა სიმრავლის ელემენტი.

არადაბრუნებადი მდგომარეობა - არადაბრუნებად მდგომარეობათა სიმრავლის ელემენტი.

მშთანთქავი მდგომარეობა - მდგომარეობა, რომელშიდაც მოხვედრის შემდეგ იქედან გამოსვლა შეუძლებელია.

მარკოვის ჯაჭვი -- შემთხვევითი პროცესი, რომელიც სასრულ ან თვლად მდგომარეობათა სიმრავლეზე მიმდინარეობს და რომელიმე მდგომარეობაში მოხვედრის ალბათობა დამოკიდებულია მხოლოდ წინა მდგომარეობაზე.

მშთანთქავი ჯაჭვი -- ჯაჭვი, რომელსაც ერთი მშთანთქავი მდგომარეობა მაინც გააჩნია, ამავე დროს ნებისმიერი მდგომარეობიდან შესაძლებელია მშთანთქავ მდგომარეობაში მოხვედრა.

ერგოდული ჯაჭვი -- ჯაჭვი, რომლის მდგომარეობებიც შეადგენენ ერთ ერგოდულ სიმრავლეს ანუ ჯაჭვი, რომელშიდაც ნებისმიერი მდგომარეობიდან შესაძლებელია ნებისმიერ მდგომარეობაში მოხვედრა.

ციკლური ჯაჭვი -- ერგოდული ჯაჭვი, რომელშიდაც ყოველ მდგომარეობაში მოხვედრა შესაძლებელია მხოლოდ დროის განსაზღვრულ პერიოდულ შუალედებში.

რეგულარული ჯაჭვი -- ერგოდული ჯაჭვი, რომელიც არ არის ციკლური.

s_j მდგომარეობას ეწოდება მიღწევადი s_i მდგომარეობიდან, თუ არსებობს ისეთი $n > 0$, რომ $p_{ij}^{(n)} > 0$. s_i და s_j მდგომარეობებს ეწოდებათ შეტყობინებადი, თუ ისინი ურთიერთმიღწევადია, ე. ი. თუ $p_{ij}^{(n)} > 0$ და $p_{ji}^{(n)} > 0$.

s_i მდგომარეობას ეწოდება არაარსებითი, თუ არსებობს ისეთი s_j მდგომარეობა, რომ s_j მდგომარეობა მიღწევადია s_i მდგომარეობიდან, ხოლო s_i მდგომარეობა არამიღწევადია s_j მდგომარეობიდან და ეწოდება არსებითი წინააღმდეგ შემთხვევაში.

5. მარკოვის ჯაჭვების მდგომარეობათა სტაციონალური (ფინალური) განაწილება

$U_{i,n}$ იყოს n -ურ ცდაში S_i-ურ მდგომარეობაში ყოფნის ალბათობა. ვთქვათ $U_n = (U_{1,n}, U_{2,n}, \ldots, U_{k,n})$ ვექტორ-სტრიქონია, რომელიც შედგება n-ურ ცდაში მდგომარეობათა ალბათობებისაგან. მაშინ

$$U_n = U_{n-1} \cdot P, \qquad \text{ანუ} \qquad U_n = U_1 \cdot P^{n-1},$$

სადაც U_1 საწყისი ვექტორ-სტრიქონია (საწყისი განაწილება).

სტაციონალური $U = (u_1, u_2, u_{3,} \ldots, u_k)$, $\sum_{i=1}^{k} u_i = 1$ ვექტორის მოძებნა შესაძლებელია აგრეთვე

$$U = U \cdot P$$

მატრიცული განტოლების ამოხსნით, სადაც

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1.$$

5. შვიდი ბავშვი თამაშობს ბურთით.

პირველი ბავშვი ბურთს ყოველთვის აწვდის მეორე ბავშვს.

მეორე ბავშვი ბურთს თანაბარი ალბათობით აწვდის მესამე ან მეშვიდე ბავშვს.

მესამე ბავშვი ბურთს თვითონ იტოვებს, როცა ის მასთან მოხვდება.

მეოთხე ბავშვი ბურთს ყოველთვის აწვდის მეექვსე ბავშვს.

მეხუთე ბავშვი ბურთს თანაბარი ალბათობით აწვდის მეოთხე, მეექვსე ან მეშვიდე ბავშვს.

მეექვსე ბავშვი ბურთს ყოველთვის აწვდის მეოთხე ბავშვს.

მეშვიდე ბავშვი ბურთს თანაბარი ალბათობით აწვდის პირველ ან მეოთხე ბავშვს.

- დაწერეთ გადასვლის ალბათობითა P მატრიცა
- მოახდინეთ მდგომარეობათა კლასიფიკაცია
- P მატრიცა ჩაწერეთ კანონიკური სახით

6. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცა.

$$1.\quad P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2.\quad P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

განსაზღვრეთ მდგომარეობათა რაოდენობა. ააგეთ შესაბამისი გრაფები. განსაზღვრეთ სხვადასხვა მდგომარეობათა პერიოდულობა და იპოვეთ სტაციონალური ვექტორი.

7. წრეწირზე აღნიშნულია ხუთი წერტილი. ნებისმიერი წერტილიდან მეზობელ წერტილში გადასვლა ხორციელდება 1/2-ის ტოლი ალბათობით. იპოვეთ გადასვლის მატრიცა და სტაციონალური ვექტორი.

8. მოახდინეთ შემდეგი ოთხი ჯაჭვის მდგომარეობათა კლასიფიკაცია და თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ P^2 და $P^{(2)}$, თუ P მატრიცის სტრიქონებია:

- (0, 1/2, 1/2), (1/2, 0, 1/2), (1/2, 1/2,0)
- (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1), (1/2,1/2, 0, 0), (0, 0, 1, 0)
- (1/2, 0, 1/2, 0), (1/2,1/2, 1/4, 0), (0, 0,1/2,1/2), (1/2, 0, 1/2, 0).

9. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვი მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცით

$$P = \begin{pmatrix} 1-c & c \\ d & 1-d \end{pmatrix}, \ 0 \le c, d \le 1.$$

c და d–ს მნიშვნელობებს დაადევით ისეთი პირობები, რომ ჯაჭვი იყოს:

- ერგოდული
- მშთანთქავი
- ციკლური

10. მოცემული ჯაჭვებიდან რომელია ერგოდული? მშთანთქავი? ციკლური? ერგოდული ჯაჭვებიდან რომელია რეგულარული?

I. $$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

II. $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

III. $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV. $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

V. $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

VI. $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VII. $$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

VIII. $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

IX. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

X. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

XI. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

XII. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცები:

1. $P = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$,

2. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$,

3. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

იპოვეთ სტაციონალური ვექტორები.

6. მარკოვის მშთანთქავი ჯაჭვების ძირითადი მახასიათებლები

1. გადასვლის მატრიცის კანონიკური ფორმა

$$P = \begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix}.$$

2. $t -$ სრული დრო, რომელსაც პროცესი ატარებს არადაბრუნებად მდგომარეობებში (საწყისი მდგომარეობის ჩათვლით).

თუ პროცესი იწყება ერგოდულ მდგომარეობაში, მაშინ $t = 0$. თუ პროცესი იწყება არადაბრუნებად მდგომარეობებში, მაშინ t სიდიდე გვიჩვენებს რამდენი ბიჯია საჭირო ერგოდულ სიმრავლეში მოსახვედრად. მშთანთქავ ჯაჭვებში ეს სიდიდე არის დრო შთანთქმამდე.

3. $T -$ არადაბრუნებად მდგომარეობათა სიმრავლე; $\tilde{T} -$ მშთანთქავ მდგომარეობათა სიმრავლე.

4. n_j - შთანთქმამდე S_j მდგომარეობაში გატარებული დრო (ეს სიდიდე განსაზღვრულია მხოლოდ არადაბრუნებადი მდგომარეობებისათვის).

5. u_j^k - ფუნქცია, რომელიც 1-ის ტოლია , თუ k –ური ბიჯის შემდეგ ჯაჭვი იმყოფება S_j მდგომარეობაში, ხოლო 0-ის ტოლია წინააღმდეგ შემთხვევაში.

6. b_{ij} - ალბათობა იმისა, რომ პროცესი არადაბრუნებადი S_i -ური მდგომარეობიდან გამოსვლის შემთხვევაში გაჩერდება მშთანთქავ S_j -ურ მდგომარეობაში.

7. r_i - არადაბრუნებად მდგომარეობაში ყოფნის დრო (ამ მდგომარეობიდან გამოსვლამდე)

8. h_{ij} - ალბათობა იმისა, რომ პროცესი ოდესმე მოხვდეს S_j მდგომარეობაში S_i –ური მდგომარეობიდან გამოსვლისას.

9. m -არადაბრუნებად მდგომარეობათა სრული როცხვი, რომლებშიც პროცესი იმყოფება შთანთქმამდე.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$M_i(f), D_i(f), P_i(p)$ - გამოსახულებები აღნიშნავს შესაბამისად f ფუნქციის მათემატიკურ მოლოდინს, f ფუნქციის დისპერსიას და P მტკიცებულობის ალბათობას იმ პირობით, რომ ჯაჭვის საწყისი მდგომარეობაა S_i .

$R = \{r_{ij}\}$ - მატრიცა r_{ij} – ელემენტებით.

$\rho = \{r_j\}$ - ვექტორ-სტრიქონი r_j კომპონენტით.

$\partial = \{c_j\}$-ვექტორ-სვეტი c_j კომპონენტით.

ξ - ვექტორ-სვეტი, რომლის ყველა ელემენტი 1-ის ტოლია.

η - ვექტორ-სტრიქონი, რომლის ყველა ელემენტი 1-ის ტოლია

E - მატრიცა რომლის ყველა ელემენტი 1-ის ტოლია.

I – ერთეულოვანი მატრიცა.

O – მატრიცა, რომლის ყველა ელემენტი 0-ია.

A^T – A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა.

A_{sq}– მატრიცა რომელიც მიიღება A მატრიცის ყველა ელემენტის კვადრატში ახარისხებით.

A_{dg}- მატრიცა რომელიც მიიღება A მატრიცისგან ყველა ელემენტის, მთავარ დიაგონალზე მყოფი ელემენტების გარდა, ნულით შეცვლით.

მშთანთქავი ჯაჭვების ძირითადი მახასიათებლები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

1. $N = \{M_i(n_j)\} = (I - Q)^{-1}$ - **ფუნდამენტალური მატრიცა**, $s_i, s_j \in T$
2. $N_2 = \{D_i(n_j)\} = (2N_{dg} - I) - N_{sq}$, $s_i, s_j \in T$
3. $B = \{b_{ij}\} = NR$, როცა $s_i \in T$, $s_j \in \tilde{T}$
4. $\tau = \{M_i(t)\} = N\xi$, როცა $s_i \in T$
5. $\tau_2 = \{D_i(t)\} = (2N - I)\tau - \tau_{sq}$, როცა $s_i \in T$
6. $\mu = \{M_i(m)\} = (NN_{dg}^{-1})\xi$
7. $M_i(r_i) = \frac{1}{1-P_{ii}}$
8. $D_i(r_i) = \frac{P_{ii}}{(i-P_{ii})^2}$

7. შებრუნებული მატრიცა

კვადრატული A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა არსებობს, თუ $|A| \neq 0$ და აღინიშნება A^{-1} სიმბოლოთი.

თუ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

სადაც

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

A მატრიცის ალგებრული დამატებაა, ხოლო $M_{ij} - A$ მატრიცის მინორი. M_{ij} მინორის მისაღებად A მატრიციდან უნდა ამოვშალოთ $i-$ ური სტრიქონი და $j-$ური სვეტი, რომელთა გადაკვეთაზეც მდებარეობს A მატრიცის a_{ij} ელემენტი.

ცხადია, რომ $A * A^{-1} = I$, სადაც I ერთეულოვანი მატრიცაა.

12. შემდეგი მატრიცები ჩაწერეთ კანონიკური სახით და იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცები:

1. $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ 2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ 5. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

8. მარკოვის ერგოდული ჯაჭვების

ძირითადი მახასიათებლები

ერგოდული ჯაჭვი ხასიათდება იმით, რომ იგი შედგება მხოლოდ ერთი ერგოდული კლასისგან, ე.ი შესაძლებელია ყოველი მდგომარეობიდან ნებისმიერ სხვა მდგომარეობაში გადასვლა.

ძირითადი აღნიშვნები:

B $=\{b_i\}$ - თითოეულ მდგომარეობაში გატარებული დროის ზღვრული დისპერსიის ვექტორი.

A – მატრიცა, რომლის თითოეული სტრიქონი α-ს ტოლია.

D- დიაგონალური მატრიცა, რომლის j -ური დიაგონალური ელემენტია $\frac{1}{a_j}$.

$M=\{m_{ij}\}$ მატრიცა, რომლის m_{ij} $-$ ელემენტი არის S_i-ური მდგომარეობიდან S_j $-$ურ მდგომარეობაში პირველად მიღწევის დროის მათემატიკური ლოდინი.

$W=\{w_{ij}\}-$ მატრიცა, რომლის w_{ij} $-$ელემენტი არის S_i-ური მდგომარეობიდან S_j $-$ურ მდგომარეობაში პირველად მიღწევის დროის დისპერსია.

$Y_i^{(n)}-S_i$ - ურ მდგომარეობაში პირველ n ბიჯზე გატარებული დრო.

ერგოდული ჯაჭვების ფუნდამენტალური მატრიცა: $Z=(I-P+A)^{-1}$

ერგოდული ჯაჭვების ძირითადი მახასიათებლები :

1. $M=\{m_{ij}\}=(I-Z+EZ_{dg})D$
2. $\bar{M}=M-M_{dg}$
3. $W=\{w_{ij}\}=M\left(2Z_{dg}D-I\right)+2(ZM-E(ZM)_{dg})$
4. $C=\{c_{ij}\}=\{a_i z_{ij}+a_j z_{ji}-a_i\delta_{ij}-a_i a_j\},\;\; \delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$
5. $m_{ii}=\frac{1}{a_i}$
6. $w_{ii}=\frac{2Z_{ii}}{a_i^2}-\frac{1}{a_i}$
7. $\alpha M=\eta Z_{dg}D$
8. $M\alpha^T=c\xi$
9. $\alpha=(c-1)[(\bar{M})^{-1}\xi]^T,\;\; c=\sum_i z_{ii}$
10. $P=I+(D-E)(\bar{M})^{-1}$.

9. მარკოვის ჯაჭვების შებრუნებადობა

ერგოდული მარკოვის ჯაჭვის შებრუნებული მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის მატრიცაა

$$\widehat{P} = \{\widehat{P}_{ij}\} = \left\{\frac{a_j P_{ji}}{a_i}\right\} = DP^T D^{-1} .$$

ერგოდული მარკოვის ჯაჭვი შებრუნებადია, თუ $D^{-1}P$ მატრიცა სიმეტრიულია, ხოლო P და $\widehat{P}$ მატრიცებისათვის უძრავი ალბათური ვექტორები ერთნაირია.

10. მარკოვის ჯაჭვების მდგომარეობათა გამსხვილება

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს მარკოვის ჯაჭვი r მდგომარეობით, გადასვლის P მატრიცით და საწყისი π განაწილებით. $A = A_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{r}$ იყოს მდგომარეობათა სიმრავლის რაიმე გახლეჩა. შევქმნათ ახალი პროცესი შემდგენაირად: ჩავთვალოთ, რომ ახალ პროცესში j -ური ეტაპის შედეგია A_k სიმრავლე, თუ j -ურ ბიჯზე საწყისი ჯაჭვი მოხვდება A_k-ში.

აღწერილი პროცედურა საშუალებას იძლევა დიდი რაოდენობის მდგომარეობების მქონე პროცესები შევცვალოთ ნაკლები რაოდენობის მდგომარეობის მქონე პროცესებით. ამ ახალ პროცესს ეწოდება გამსხვილებული პროცესი.

ვიტყვით, რომ მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობები შეიძლება გავამსხვილოთ $A = A_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{r}$ გახლეჩის საშუალებით, თუ ნებისმიერი საწყისი π განაწილებისათვის გამსხვილებული პროცესი წარმოადგენს მარკოვის ჯაჭვს, რომლის გადასვლის ალბათობები არაა დამოკიდებული π-ზე.

იმისთვის, რომ მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობათა გამსხვილება შესაძლებელი იყოს $A = A_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{r}$ გახლეჩით, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი ორი A_i და A_j სიმრავლისათვის P_{k,A_j} ალბათობებს ჰქონდეთ ერთი და იგივე მნიშვნელობა ყველა k -თვის A_i-დან. ეს საერთო $\{\widehat{P}_{ij}\}$ მნიშვნელობები წარმოქმნიან გამსხვილებული ჯაჭვის გადასვლის მატრიცას.

დავუშვათ მოცემული გვაქვს მარკოვის ჯაჭვი, რომლის მდგომარეობებიც შესაძლებელია გავამსხვილოთ $A = A_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{r}$ გახლეჩით. ვთქვათ საწყისი ჯაჭვი შედგებოდა r მდგომარეობისაგან, ხოლო ახალ ჯაჭვს აქვს S მდგომარეობა. ვთქვათ U არის $S \times r$ განზომილების მატრიცა, რომლის i −ური სტრიქონი წარმოადგენს

ალბათურ ვექტორს, რომელსაც გააჩნია ტოლი კომპონენტები მდგომარეობის სიმრავლის მდგომარეობებისათვის და ნულები დანარჩენ ადგილებზე. ვთქვათ V არის $r \times S$ განზომილების მატრიცა, რომლის j −ური სვეტი წარმოადგენს ვექტორს, რომლის A_j −დან მდგომარეობების შესატყვისი კომპონენტები 1-ის ტოლია, ხოლო დანარჩენი კომპონენტები 0-ია. მაშინ გამსხვილებული გადასვლის $\widehat{P}$ მატრიცა მოიცემა ფორმულით

$$\widehat{P} = UPV.$$

თუ P მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის მატრიცაა, რომლის მდგომარეობების გამსხვილებაც შესაძლებელია A გახლეჩის საშუალებით, ხოლო U და V მატრიცები განსაზღვრულები არიან ასეთი გახლეჩვისათვის ისე, როგორც ზემოთ განვსაზღვრეთ, მაშინ

$$VUPV=PV.$$

ეს პირობა მდგომარეობათა გამსხვილების შესაძლებლობის ექვივალენტურია .

მაგ: ვთქვათ ჯაჭვი მოცემულია

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

გადასვლის მატრიცით. შევნიშნოთ, რომ S_1 −დან და S_3-დან S_2-ში გადასვლის ალბათობები ერთი და იგივეა. მაშასადამე $A = (\{S_2\}, \{S_1, S_3\}) = \{A_1, A_2\}$ გახლეჩისათვის გამსხვილების საჭირო პირობები შესრულებულია და გამსხვილებული ჯაჭვის გადასვლის მატრიცა

$$\widehat{P} = \underset{U}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \underset{P}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \underset{V}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{U}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}} \underset{PV}{\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

13. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცა.

$$1.\ P=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1/2&1/2&0&0\\1/3&1/3&1/3&0\end{pmatrix}\qquad 2.\ P=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1/3&0&2/3&0\end{pmatrix}$$

განსაზღვრეთ მდგომარეობათა რაოდენობა. ააგეთ შესაბამისი გრაფები. განსაზღვრეთ სხვადასხვა მდგომარეობათა პერიოდულობა და იპოვეთ სტაციონალური ვექტორი.

14. წრეწირზე აღნიშნულია ხუთი წერტილი. ნებისმიერი წერტილიდან მეზობელ წერტილში გადასვლა ხორციელდება 1/2-ის ტოლი ალბათობით. იპოვეთ გადასვლის მატრიცა და სტაციონალური ვექტორი.

15. ვთქვათ მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცაა

$$P=\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1&0\end{pmatrix},$$

ხოლო საწყისი ვექტორებია:

ა) $U_1=(1,0)$
ბ) $U_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
გ) $U_1=(0,1)$

სამივე შემთხვევაში შეავსეთ ცხრილი

n-ური ცდა	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U_{1,n}$ $U_{2,n}$									

შემდეგ ამოხსენით $U=UP$ განტოლება და იპოვეთ სტაციონალური U ვექტორი.

16. მოცემულია ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

და საწყის ალბათობათა ვექტორი (0,2 ; 0,5 ; 0,3). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი ბიჯის განმავლობაში სისტემა არ შეიცვლის მდგომარეობას.

17. ორ ყუთში მოთავსებულია 3 ბურთულა. ყოველ წამს შემთხვევით ირჩევენ ერთ ბურთულას და სდებენ ერთი ყუთიდან მეორეში. მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობად განვიხილოთ ბურთების რაოდენობა პირველ ყუთში. ამოვწეროთ ერთბიჯიანი გადასვლის ალბათობათა მატრიცა.

18. მოცემულია ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

და საწყის ალბათობათა ვექტორი (0,3 ; 0,1 ; 0,6). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამი ბიჯის შემდეგ სისტემა იქნება იგივე მდგომარეობაში, რომელშიც იმყოფებოდა საწყის მომენტში.

19. შესაძლებელია თუ არა, რომ ნებისმიერი სტოქასტური მატრიცა წარმოადგენდეს მარკოვის რაიმე ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ორ ბიჯზე გადასვლის მატრიცას?

20. შესაძლებელია თუ არა, რომ მდგომარეობათა სასრული რაოდენობის მქონე მარკოვის ჯაჭვის ყველა მდგომარეობა იყოს არაარსებითი?

21. შესაძლებელია თუ არა, რომ მდგომარეობათა თვლადი რაოდენობის მქონე მარკოვის ჯაჭვის ყველა მდგომარეობა იყოს არაარსებითი?

22. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ჩამოთვალეთ შეტყობინებად მდგომარეობათა ყველა წყვილი.

23. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცა. იქნება თუ არა ეს ჯაჭვი პერიოდული? პერიოდული ჯაჭვის შემთხვევაში იპოვეთ პერიოდი.

$$1.\ P=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\qquad 2.\ \ P=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0&0\\0&1/2&1/2&0\\0&0&1/2&1/2\\1/2&0&0&1/2\end{pmatrix}.$$

24. მიუთითეთ დაბრუნებადი და არადაბრუნებადი მდგომარეობები, თუ მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცაა

$$P=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0&0\\0&1/2&1/2&0\\0&0&1/2&1/2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

25. ერგოდულია თუ არა მარკოვის ჯაჭვი, თუ ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცაა

$$1.\ \ P=\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1&0\end{pmatrix}\qquad 2.\ P=\begin{pmatrix}1&0\\1/2&1/2\end{pmatrix}\qquad 3.\ \ P=\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/3&2/3\end{pmatrix}$$

$$4.\ \ P=\begin{pmatrix}1/4&3/4\\0&1\end{pmatrix}\qquad 5.\ \ P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad 6.\ \ P=\begin{pmatrix}0{,}1&0&0{,}9\\1&0&0\\0{,}3&0&0{,}7\end{pmatrix}$$

$$7.\ \ P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1/2&1/2&0&0\\1/4&1/4&1/4&1/4\end{pmatrix}\qquad 8.\ \ P=\begin{pmatrix}0{,}1&0{,}7&0{,}2\\1&0&0\\0{,}3&0&0{,}7\end{pmatrix}$$

$$9.\ \ P=\begin{pmatrix}0{,}1&0&0{,}9\\1&0&0\\0{,}3&0{,}3&0{,}4\end{pmatrix}\qquad 10.\ \ P=\begin{pmatrix}0{,}1&0&0{,}9\\1&0&0\\0&0{,}5&0{,}5\end{pmatrix}$$

$$11.\ \ P=\begin{pmatrix}0{,}1&0&0{,}9\\0{,}5&0&0{,}5\\0{,}3&0{,}5&0{,}2\end{pmatrix}$$

26. მოცემულია ერგოდული ჯაჭვი

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ q & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad q+p=1.$$

ვიპოვოთ A და Z, თუ $p=0{,}5,\ q=0{,}5$; $p=0{,}8,\ q=0{,}2$; $p=0{,}3,\ q=0{,}7$.

27. ცნობილია, რომ ერგოდულ ჯაჭვს აქვს

$$M=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 4\\ 1 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

მატრიცა. ვაჩვენოთ, რომ ეს ჯაჭვი ციკლურია.

28. 26-ე მაგალითში P–ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება ჯაჭვი შებრუნებადი?

29. ვიპოვოთ M 26-ე მაგალითისათვის.

30. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ერგოდული ორმდგომარეობიანი ჯაჭვი შებრუნებადია.

31. ვთქვათ

$$P=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5\end{array}\\ \begin{array}{c} s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\\ s_5\end{array} & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ q & 0 & p & 0 & 0\\ 0 & q & 0 & p & 0\\ 0 & 0 & q & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}.$$

$P=\dfrac{1}{2}$ –თვის შემდეგი ორი გახლეჩისათვის რომელი იძლევა მარკოვის ჯაჭვის გამსხვილებას?

ა. $A=\left(\{S_1S_3S_5\},\{S_2S_4\}\right)$

ბ. $B=\left(\{S_1S_5\},\{S_2S_4\},\{S_3\}\right)$

32. ვიპოვოთ ისეთი გახლეჩა სამ ჯგუფად, რომლის დროსაც

$$P=\begin{array}{c|ccccc} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ s_2 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ s_3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ s_4 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ s_5 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{array}$$

პროცესი გამსხვილებადია.

33. ცნობილია, რომ მარკოვის ჯაჭვი სრულად განისაზღვრება საწყისი განაწილებით და ერთბიჯიანი გადასვლის მატრიცით. განისაზღვრება თუ არა მარკოვის ჯაჭვი საწყისი განაწილებით და ორბიჯიანი გადასვლის მატრიცით?

34. განსაზღვრეთ, თუ c და d პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის მარკოვის ჯაჭვი ცალსახად განისაზღვრება საწყისი განაწილებით და ორბიჯიანი გადასვლის მატრიცით:

$$P^{(2)}=\begin{pmatrix} c & 1-c \\ 1-d & d \end{pmatrix}.$$

35. მარკოვის ჯაჭვს აქვს ერთბიჯიანი გადასვლის მატრიცა

$$P^{(1)}=\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ n ბიჯზე გადასვლის მატრიცა და ზღვარი, როცა $n\to\infty$.

36. დროის საწყის მომენტში ურნაში n_0 რაოდენობის თეთრი და m_0 რაოდენობის შავი ბირთვებია. დროის ყოველ მომენტში ურნიდან იღებენ ერთ ბირთვს დაბრუნების გარეშე. ვთქვათ დროის k მომენტში ურნაში n_k რაოდენობის თეთრი და m_k რაოდენობის შავი ბირთვია. რომელი მიმდევრობები ქმნიან მარკოვის ჯაჭვს და რომელი არა?

ა) n_k, ბ) n_k-m_k , გ) n_k+m_k , დ) (n_k,m_k) წყვილი,

ე) $n_k-m_k+1/(n_k+m_k+2)$?

37. მარკოვის ჯაჭვის ერთბიჯიანი გადასვლის მატრიცაა

$$P=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0\\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

მიუთითეთ არსებით და არაარსებით მდგომარეობებზე.

38. შეიძლება თუ არა მდგომარეობათა სასრული სიმრავლის მარკოვის ჯაჭვის ყველა მდგომარეობა იყოს არაარსებითი?

39. მარკოვის ჯაჭვის ერთბიჯიანი გადასვლის მატრიცაა

$$P=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

ჩამოთვალეთ შეტყობინებად მდგომარეობათა ყველა წყვილი.

40. პერიოდულია თუ არა მარკოვის ჯაჭვი, თუ ჯაჭვის ერთბიჯიანი გადასვლის მატრიცაა

$$1.\quad P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad 2.\quad P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

პერიოდულობის შემთხვევაში რა არის მისი პერიოდი?

41. მარკოვის ჯაჭვის რომელი მდგომარეობა არის დაბრუნებადი და რომელი არა, თუ

$$1.\quad P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad 2.\quad P=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\quad 3.\quad P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}.$$

42. მარკოვის ჯაჭვის ერთბიჯიანი გადასვლის მატრიცაა :

1. $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ 2. $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

3. $P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

იპოვეთ სტაციონარული განაწილება.

43. ერგოდულია თუ არა მარკოვის ჯაჭვი, თუ მარკოვის ჯაჭვის ერთბიჯიანი გადასვლის მატრიცაა

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

7. $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

44. ვთქვათ მარკოვის ჯაჭვს აქვს ორი მდგომარეობა. აჩვენეთ, რომ ადგილი ექნება ერთ-ერთ შემთხვევას შემდეგი სამიდან:

1. ჯაჭვი ერგოდულია;
2. მდგომარეობები არ არიან შეტყობინებადი;
3. მარკოვის ჯაჭვის ერთ ბიჯზე გადასვლის მატრიცას აქვს

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

სახე.

45. ორ მდგომარეობიანი მარკოვის ერგოდული ჯაჭვის ზღვრული ალბათობებია p და $q = 1 - p$. იპოვეთ ერთ ბიჯზე მდგომარეობებს შორის გადასვლის მატრიცა.

11. შემთხვევითი ხეტიალი და გაკოტრების ამოცანა

განვიხილოთ მოთამაშე, რომელიც თამაშის დროს იგებს ან აგებს ერთ დოლარს შესაბამისად p და q ალბათობით. დავუშვათ, რომ მისი საწყისი კაპიტალი ტოლია z, ხოლო მოწინააღმდეგისა a-z, , ანუ ჯამური კაპიტალი ტოლია a. თამაში გრძელდება მანამ, სანამ მოთამაშის კაპიტალი არ შემცირდება ნულამდე ან სანამ არ გაიზრდება a-მდე, ანუ ერთ-ერთი მოთამაშის გაკოტრებამდე. ჩვენ გვაინტერესებს მოთამაშის გაკოტრების ალბათობა და თამაშის ხანგრძლივობისათვის ალბათობების განაწილება. ეს არის გაკოტრების კლასიკური ამოცანა. დავუშვათ q_z არის მოთამაშის საბოლოოდ გაკოტრების ალბათობა, ხოლო p_z – ალბათობა იმისა, რომ იგი საბოლოოდ მოიგებს. მაშინ მოთამაშის საბოლოოდ გაკოტრების ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$q_z = \frac{(q/p)^a - (q/p)^z}{(q/p)^a - 1}; \qquad (1)$$

როცა $p = q = \frac{1}{2}$ ეს ფორმულა აზრს კარგავს. ამ შემთხვევაში

$$q_z = 1 - z/q; \qquad (2)$$

ამრიგად, მოთამაშის გაკოტრების ალბათობა გამოითვლება (1)-ით, როცა $p \neq q$ და (2)-ით, როცა $p = q = \frac{1}{2}$.

46. ააგეთ მარკოვის ჯაჭვის მოდელი მოთამაშის გაკოტრების ამოცანაში შემდეგი პირობის გათვალისწინებით: მოთამაშე ყოველი პარტიის შემდეგ აგებს ერთ დოლარს p ალბათობით, იგებს ერთ დოლარს q ალბათობით ან პარტია მთავრდება ფრედ r ალბათობით ($p + q + r = 1$). თამაში გრძელდება ერთ-ერთი მოთამაშის გაკოტრებამდე.

47. ააგეთ მარკოვის ჯაჭვის მოდელი მოთამაშის გაკოტრების ამოცანაში შემდეგი პირობის გათვალისწინებით: მოთამაშე ყოველი პარტიის შემდეგ აგებს ერთ დოლარს p ალბათობით, ან იგებს მოწინააღმდეგის მთელ თანხას $q = 1 - p$ ალბათობით. თამაში გრძელდება ერთ-ერთი მოთამაშის გაკოტრებამდე.

48. ცნობილი სტატისტიკური წესის „ან l სიგრძის წარმატებათა სერია , ან m სიგრძის წარუმატებლობათა სერია„ მიხედვით ააგეთ ორმოქმედებიანი სასრული ავტომატის მოდელი.
49. ააგეთ ორმოქმედებიანი სასრული ავტომატის მოდელი იმ შემთხვევაში, როცა ავტომატი ჯარიმის შემთხვევაში x_i მდგომარეობიდან p_i ალბათობით გადადის x_{i-1} მდგომარეობაში, ხოლო მოგების შემთხვევაში ${q_i}/{2}$ ალბათობით გადადის x_{i-1} ან x_{i+1} მდგომარეობებში, როცა $i = 2,3,\dots,n-1$, ხოლო x_n მდგომარეობა რჩება თავის თავში ($q_i + p_i = 1$).

50. კომერციული საწარმოს თანამშრომლები დაყოფილია სამ ჯგუფად:

- E_1 -- მაღალანაზღაურებადი;
- E_2- საშუალო შემოსავლიანი;
- E_3 -- დაბალშემოსავლიანი.

სტატისტიკური გამოკვლევით შეფასებულია თანამშრომლების ერთი ჯგუფიდან სხვა ჯგუფში გადასვლის ალბათობა ერთი წლის განმავლობაში. ამავე დროს გასათვალისწინებელია დათხოვნის შესაძლებლობა- E_4. სტოქასტურ მატრიცას აქვს სახე

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

იპოვე ალბათობა, რომ ორი წლის შემდეგ

ა) საშუალო შემოსავლიანი თანამშრომელი შეიძლება გახდეს მაღალანაზღაურებადი, დაბალანაზღაურებადი;

ბ) დაბალანაზღაურებადი თანამშრომელი შეიძლება დათხოვნილი იქნეს.

51. ორი A და B ავტომობილი ქირავდება ერთი და იგივე ფასად. ავტომობილის შესაძლებელი მდგომარეობებია

- E_1 - კარგად მუშაობს;
- E_2 - საჭიროებს რეგულირებას.

სტოქასტურ მატრიცებს აქვს სახე:

$$P_A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad P_B = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

ორივე ავტომობილისათვის იპოვე სტაციონარული ალბათობები. რომელი ავტომობილის დაქირავებაა მიზანშეწონილი?

52. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცები:

$$1.\quad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2.\quad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$3.\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$4.\quad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

ა) მიიყვანეთ მატრიცები კანონიკურ ფორმაზე

ბ) გამოთვალეთ ჯაჭვების ყველა ძირითადი მახასიათებელი

53. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებს შორის ერთ ბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მატრიცები:

$$ა)\quad P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ბ)\quad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

გ) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$

გამოთვალეთ ჯაჭვის ყველა ძირითადი მახასიათებელი.

54. $x = 1,2,3,4$ არის ნაწილაკის კოორდინატები წრფეზე. ყოველ წამში ნაწილაკი $x = 2,3$ მდგომარეობებიდან მარჯვნივ ან მარცხნივ ასრულებს ერთეულოვან ნახტომებს შესაბამისად 0,7 და 0,3 ალბათობებით. $x = 1$ მდგომარეობიდან ნაწილაკი 0,7 ალბათობით გადადის $x = 2$ წერტილში და 0,3 ალბათობით რჩება იმავე ადგილზე, ხოლო $x = 4$ მდგომარეობიდან 0,7 ალბათობით რჩება ადგილზე, ხოლო 0,3 ალბათობით გადადის $x = 3$ მდგომარეობაში.

- შეადგინეთ ხეტიალის მატრიცა და გრაფი.
- იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცა.

55. წრეწირზე განლაგებულია ოთხი წერტილი, რომლებიც წარმოადგენს წესიერი ოთხკუთხედის წვეროებს. ნაწილაკი მოძრაობს წერტილიდან წერტილში შემდეგნაირად: მოცემული წერტილიდან ის 0,5 ალბათობით გადაადგილდება მეზობელ წერტილებში.

- ააგეთ მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობათა შორის გადასვლის მატრიცა და გრაფი.
- რა არის ალბათობა იმისა, რომ ნაწილაკი ორი ბიჯის შემდეგ აღმოჩნდება იგივე წერტილში?
- იპოვეთ ზღვრული (სტაციონარული) განაწილება.
- იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცა.

56. ერთ-ერთ პროფესორს აქვს სამი საყვარელი კითხვა, რომელთაგან ერთ-ერთს ის ყოველ გამოცდაზე ეკითხება სტუდენტებს. ის არასოდეს არ სვავს ერთსა და იგივე კითხვას ზედიზედ ორჯერ. თუ მან წინათ დასვა A კითხვა, მაშინ ის აგდებს მონეტას და თუ მოვიდა გერბი, სვავს B კითხვას; თუ მან წინათ დასვა B კითხვა, მაშინ ის აგდებს ორ მონეტას და სვავს C კითხვას, თუ მოვიდა ორი გერბი; თუ ეს იყო C კითხვა,

მაშინ იგი აგდებს სამ მონეტას და სვავს A კითხვას სამი გერბის მოსვლის შემთხვევაში.

- ააგეთ მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობათა შორის გადასვლის მატრიცა და გრაფი.
- ამ კითხვებიდან რომელს უფრო ხშირად სვავს პროფესორი?
- იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცა.

57. ორ უჯრაში მოთავსებულია სამი საგანი. ყოველ წამში შემთხვევითი სახით აირჩევა ერთ-ერთი საგანი ამ სამიდან და გადაიტანება ერთი უჯრიდან მეორე უჯრაში. მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობებად განიხილეთ პირველ ყუთში საგნების რაოდენობა.

- ააგეთ მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობათა შორის გადასვლის მატრიცა და გრაფი.
- იპოვეთ გადასვლის ალბათობები ორ ბიჯზე.
- იპოვეთ ზღვრული (სტაციონარული) განაწილება.
- იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცა.

58. ზაფხულში ელექტროენერგიის მოხმარება მჭიდროდაა დაკავშირებული ჰაერის ტემპერატურაზე. ამიტომ ელექტროენერგიის მწარმოებლებმა პრინციპში უნდა გაითვალისწინონ ცხელი, ზომიერი და ცივი ამინდის დადგომის ალბათობები. დავუშვათ, რომ ხვალისათვის ამინდის პროგნოზი განისაზღვრება დღევანდელი ამინდით. დღევანდელი ცივი ამინდის შემთხვევაში ხვალ თანაბარი ალბათობით შეიძლება ცხელოდეს, იყოს ზომიერი ამინდი ან ციოდეს. დღევანდელი სიცხის შემდეგ ნახევარ შემთხვევაში ხვალ იქნება ზომიერი ამინდი, ხოლო მესამედ შემთხვევაში ისევ სიცხე. თუ დღეს ზომიერი ამინდია, მაშინ ხვალ ½ ალბათობით იქნება სიცხე და 1/3 ალბათობით – ზომიერი ამინდი.

- ააგეთ მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობათა შორის გადასვლის მატრიცა და გრაფი.
- დაახასიათეთ ჯაჭვი და მისი თითოეული მდგომარეობა.
- რა არის იმის ალბათობა, რომ მომდევნო ორი დღის განმავლობაში შენარჩუნდება დღევანდელი ამინდი? (იგულისხმება, რომ დღეს თანაბარი ალბათობით შეიძლება ცხელოდეს, იყოს ზომიერი ამინდი ან ციოდეს).

- იპოვეთ ზღვრული ალბათობები.
- იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცა.

59. მოთამაშის საწყისი კაპიტალია 5 ლარი და ის ყიდულობს ერთ ლატარიის ბილეთს, რომლის ფასი 1 ლარია და მას 1/5 ალბათობით შეუძლია მოიგოს 1 ლარი. ის თამაშს აგრძელებს მანამ, სანამ არ მოაგროვებს 8 ლარს ან არ წააგებს მთელ თავის თანხას.
    - აღწერეთ ეს ამოცანა მარკოვის ჯაჭვის საშუალებით.
    - მოახდინათ მდგომარეობათა კლასიფიკაცია.
    - ააგეთ გადასვლის მატრიცა და გრაფი.
    - იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცა.

60. მოთამაშის საწყისი კაპიტალია 3 ლარი და ის ყიდულობს ერთ ლატარიის ბილეთს, რომლის ფასი 1 ლარია და მას 1/4 ალბათობით შეუძლია მოიგოს 1 ლარი. ის თამაშს აგრძელებს მანამ, სანამ არ მოაგროვებს 7 ლარს ან არ წააგებს მთელ თავის თანხას.
    - აღწერეთ ეს ამოცანა მარკოვის ჯაჭვის საშუალებით.
    - მოახდინათ მდგომარეობათა კლასიფიკაცია.
    - ააგეთ გადასვლის მატრიცა და გრაფი.
    - იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცა.

61. მოთამაშის საწყისი კაპიტალია 6 ლარი და ის ყიდულობს ერთ ლატარიის ბილეთს, რომლის ფასი 1 ლარია და მას 1/6 ალბათობით შეუძლია მოიგოს 1 ლარი. ის თამაშს აგრძელებს მანამ, სანამ არ მოაგროვებს 10 ლარს ან არ წააგებს მთელ თავის თანხას.
    - აღწერეთ ეს ამოცანა მარკოვის ჯაჭვის საშუალებით.
    - მოახდინათ მდგომარეობათა კლასიფიკაცია.
    - ააგეთ გადასვლის მატრიცა და გრაფი.
    - იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცა.

62. მოთამაშის საწყისი კაპიტალია 2 ლარი და ის ყიდულობს ერთ ლატარიის ბილეთს, რომლის ფასი 1 ლარია და მას 1/4 ალბათობით შეუძლია მოიგოს 1 ლარი. ის თამაშს აგრძელებს მანამ, სანამ არ მოაგროვებს 6 ლარს ან არ წააგებს მთელ თავის თანხას.
    - აღწერეთ ეს ამოცანა მარკოვის ჯაჭვის საშუალებით.

- მოახდინათ მდგომარეობათა კლასიფიკაცია.
- ააგეთ გადასვლის მატრიცა და გრაფი.
- იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცა.

63. ბომბდამშენთა ესკადრილიაში ირიცხება 4 თვითმფრინავი. საბრძოლო დავალებას ღებულობენ დღეში ერთხელ. თუ დღის ბოლოს არცერთი თვითმფრინავი არ დარჩა, ან დარჩა ერთი ან ორი თვითმფრინავი, მაშინ ესკადრილიის მეთაური ღამით რეზერვიდან ღებულობს ერთ თვითმფრინავს. თუ დღის ბოლოს თვითმფრინავების რაოდენობა აღწევს 3 ან 4-ს, მეთაურს არ აქვს უფლება მოითხოვოს შევსება. თუ შემდეგ დღეს თვითმფრინავების რაოდენობა აღწევს 3 ან 4-ს, მაშინ ესკადრილიას დავალება მიეცემა, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი არა. დავალების შესრულებისას თითოეული თვითმფრინავის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობაა 0,25.

- შემოიღეთ ესკადრილიის მდგომარეობების ცნება ისე, რომ სისტემამ შეადგინოს მარკოვის ჯაჭვი.
- ააგეთ გადასვლის მატრიცა და გრაფი.
- გამოიკვლიეთ ჯაჭვი რეგულარობაზე. არსებობს თუ არა ზღვრული ალბათობები?
- იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცა.

64. ორ ურნაში მოთავსებულია 5 თეთრი და 5 შავი ბირთვი ისე, რომ თითოეულ ურნაში 5 ბირთვია. პირველ ურნაში შავი ბირთვების რაოდენობა განსაზღვრავს სისტემის მდგომარეობას. ყოველ ბიჯზე თითოეული ურნიდან შემთხვევით იღებენ ერთ ბირთვს და უცვლიან ადგილებს.

- იპოვეთ გადასვლის ალბათობები ერთ ბიჯზე და ააგეთ გრაფი.
- იპოვეთ ზღვრული ალბათობა იმისა, რომ პირველ ურნაში აღმოჩნდება ზუსტად ორი შავი ბირთვი.
- დაწერეთ განტოლებათა სისტემა ზღვრული ალბათობების გამოსათვლელად. აქვს თუ არა ამ სისტემას ამონახსნი?
- იპოვეთ ფუნდამენტალური მატრიცა.

65. რომელიღაც ქალაქში ყოველ მცხოვრებს აქვს ერთ-ერთი პროფესია: A,B, ან C. თუ მამის პროფესიაა A,B, ან C , მაშინ შვილები ინარჩუნებენ მამის პროფესიას შესაბამისად p_1, p_2, p_3 ალბათობებით, ხოლო თანაბარი ალბათობით ირჩევენ ორ სხვა პროფესიას.

- ააგეთ მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობათა შორის გადასვლის მატრიცა და გრაფი.
- იპოვეთ 2, 3 თაობისათვის მდგომარეობათა შორის გადასვლის მატრიცა.
- იპოვეთ ამ ქალაქში პროფესიათა განაწილების ალბათობები ერთი, ორი, სამი თაობისათვის, თუ ამჟამინდელ თაობაში ცნობილია პროფესიათა განაწილება: A – q_1 , B – q_2, C – q_3
- იპოვეთ ზღვრული (სტაციონარული) განაწილება.

პროფესიათა მიხედვით მდგომარეობები იყოს:

1 მდგომარეობა - მამის პროფესიაა A,

2 მდგომარეობა - მამის პროფესიაა B,

3 მდგომარეობა - მამის პროფესიაა C.

შესაბამისი ალბათობები მოცემულია შემდეგ ცხრილში

1 ვარიანტი

	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3
	0.3	0.7	0.4	0.6	0.1	0.3

2 ვარიანტი

	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3
	0.5	0.7	0.4	0.4	0.1	0.3

3 ვარიანტი

	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3
	0.3	0.6	0.4	0.6	0.1	0.6

4 ვარიანტი

	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3
	0.8	0.7	0.4	0.3	0.1	0.5

5 ვარიანტი

	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3
	0.3	0.4	0.4	0.6	0.3	0.1

6 ვარიანტი

	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3
	0.4	0.3	0.9	0.2	0.5	0.4